
PID KONTROLÖR İLE TASARIM

Özet:Bu konuda, PI, PD, PID kontrolörleri ile tasarım, hem zaman tanım aralığında hem de frekans tanım aralığında ele alınarak incelenmiştir. Ayrıca ek olarak ise matematik modeli olmayan sistemlerde PID kontrolörünün nasıl gerçekleştirilebileceği özetlenmiştir.

1.Giriş

Tasarım aşamasına geçmeden önce bazı tanımlamaların ele alınması gerekmektedir. Kontrol sistem tasarımı üç adımdan oluşur:

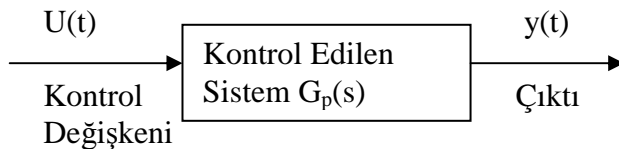
1. Sistemin ne yapması ve nasıl yapması gerektiğinin belirlenmesi (tasarım kriterleri).
2. Kontrolör yapısının kontrol edilen sisteme nasıl bağlanacağını belirlenmesi.
3. Kontrolör parametrelerinin tasarım hedeflerine göre belirlenmesi.

1. Tasarım Kriterleri

Tasarım kriterleri her uygulamaya göre farklılık gösterir ve genellikle görece kararlılık, kararlı hal hatası, geçici yanıt ve frekans yanıtı ile ilgili kısımlardan oluşur. Lineer kontrol sistemlerinin tasarımı zaman yada frekans tanım bölgelerinde gerçekleştirilebilir. Örneğin kararlı hal hatası genellikle birim basamak, rampa yada parabolik giriş için tanımlanır. Belirli tasarım kriterleri zaman tanım aralığında çok kolay değerlendirilebilir. En büyük aşım, yükselme zamanı ve yerleşme zamanı gibi birim basamak giriş için tanımlanan kriterler genellikle zaman tanım bölgesi tasarımında kullanılır. Görece kararlılık kazanç payı, faz payı ve rezonans tepesi gibi büyüklüklerle ölçülür. Bu tip frekans tanım bölge kriterleri Bode diyagramı, kutupsal yer eğrisi, genlik faz eğrisi ve Nichols abağı ile birlikte kullanılırlar.

Lineer sistemlerin tasarımında Bode, Nyquist, genlik-faz eğrisi ve Nichols abağı gibi yöntemler yaklaşık çizimlerde ayrıntıya gerek duymazlar. Böylece kazanç payı, faz payı, rezonans tepesi gibi frekans tanım bölgesi kriterlerinden yararlanılarak yüksek mertebeden sistemler bile tasarlanabilir. Diğer taraftan, zaman tanım bölgesinde yükselme zamanı, gecikme zamanı, yerleşme zamanı, aşım vs. gibi davranış kriterleri sadece ikinci mertebeden sistemlerde analitik tasarlanabilir, yada ikinci mertebeden sistemler cinsinden yaklaşık ifade edilebilir.

2. Kontrolör yapıları



Şekil-1. Kontrol sistem dinamiği

Kontrol edilen bir sistemin dinamiği genelde şekil-1’de verilen blok diyagramı ile ifade edilir. Tasarımın amacı $y(t)$ ile gösterilen kontrol edilen çıkış değişkeninin istenilen şekilde

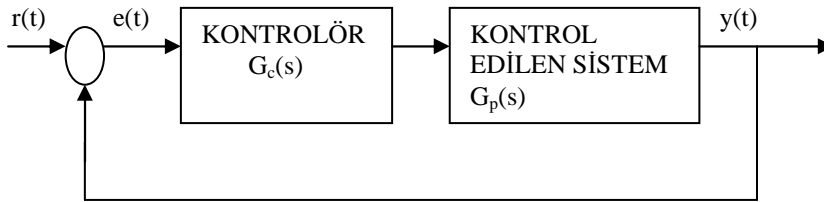
davranmasıdır. Sorun temelde tasarım amaçlarının tümü gerçekleşecek biçimde $u(t)$ kontrol işaretini belirli bir zaman aralığında belirtmektedir.

Tasarım yönteminde, tasarımcı kontrolörünü kontrol edilen prosese göre nereye yerleştirmesi gerektiğini genellikle önceden belirler ve sisteme sabit yapıda bir tasarım uygular. Bu durumda sorun kontrolör elemanlarını belirlemeye dönüşür.

Yaygın olarak kullanılan kontrol yapıları:

- Seri kompanzasyon
- Geribeslemeli kompanzasyon
- Durum geribeslemeli kompanzasyon
- Seri-geribeslemeli kompanzasyon
- İleri beslemeli kompanzasyon

Bu kontrol yapılarının içerisinde en yaygın kullanılanı seri kompanzasyon olup yapısı şekil-2 de gösterilmiştir.



Şekil-2. Seri kompanzasyon

Yukarıdaki kompanzasyon yapıları içinde PID kontrolörü yaygın uygulama alanı bulan ve etkin işaretin oransal, integral ve türevsel bir bileşimini sisteme uygulayan bir kontroldür. Bu işaret bileşenleri zaman tanım bölgesinde kolaylıkla gerçekleştirilip görüntülenebildiğinden, PID kontrolü genellikle zaman tanım bölgesi yöntemleri ile tasarlanır.

3. Tasarım ilkeleri

Belirli bir kontrolör yapısı seçildikten sonra, tasarımcı tüm tasarım koşullarını gerçekleyen bir kontrolör türünü, eleman değerleri ile birlikte belirlenmelidir. Mühendislik uygulamaları gereği tüm tasarım koşullarını sağlayan en basit yapıyı kontrolörün seçimi tercih edilir. Genellikle kontrolörün karmaşıklığı arttıkça fiyatı artar, güvenilirliği azalır ve tasarımı güçleşir.

Bir kontrolde karar kıldıktan sonra ikinci adım kontrolör parametre değerlerini belirlemektir. Bu parametre değerleri kontrolörü oluşturan bir yada daha fazla transfer fonksiyona ilişkin katsayılarıdır.

Tasarım, zaman yada frekans, hangi tanım bölgesinde sürdürülürse sürdürülsün , bazı yöntem yada tasarım kurallarını izlemelidir. Zaman tanım bölgesi tasarımın özellikle s-düzlemine ve kök eğrilerine dayandığını göz önünde bulundurulmalıdır. Frekans tanım bölgesi tasarımında ise, çevrim transfer fonksiyonu genlik ve faz etkilenerek, kriterler sağlatmaya çalışılır.

Tasarımda kullanılmak amacıyla zaman ve frekans tanım bölgesi özelliklerini özetlemekte yarar vardır:

1. Kapalı çevrim transfer fonksiyonunda karmaşık eşlenik kutuplar az sönümlü basamak yanıtlarına neden olur. Tüm kutupların gerçek olması durumunda birim basamak yanıtı aşırı sönümlüdür. Ancak, kapalı çevrim transfer fonksiyonundaki sıfırlar, sistem aşırı sönümlü olsa bile, aşırıya neden olabilir.
2. Sistem yanıtı, s-düzleminde koordinat merkezine en yakın kutuplar tarafından belirlenir. Sola doğru uzaklaşan kutuplar geçici yanıtta daha hızlı söner.
3. Baskın sistem kutupları s-düzleminde sola doğru uzaklaştıkça, sistem yanıtı hızlanır ve bandgenişliği artar.
4. Baskın sistem kutupları s-düzleminde sola doğru uzaklaştıkça, iç işaret genlikleri büyür ve sistemin işletim masrafı artar. Bu her ne kadar analitik doğrulansa da, bir çiviye çekiçle daha sert vurulduğunda, çivinin daha fazla ötelendiği ve her darbede daha fazla enerjiye ihtiyaç duyulduğu gerçeğinden kaynaklanır. Benzer şekilde bir spor arabasının ivmesi fazladır, ancak normal bir arabaya göre daha fazla yakıt harcar.
5. Sistem transfer fonksiyonunda bir sıfır bir kutbun yanında yer alması halinde, kutup sistem yanıtını çok küçük bir genlikle etkiler (sıfır-kutup silmesi).
6. Zaman ve frekans tanım bölgesi kriterleri kendi aralarında ilişkilidir. Yükselme zamanı ve bandgenişliği ters orantılıdır. Faz payı, kazanç payı, rezonans tepesi ve sönüm oranı ters orantılıdır.

2. Zaman ve Frekans Tanım Bölgesi Kriterleri

Analiz problemlerinde sistemlere referans giriş işaretleri uygulanır ve bu işaretlere verilen yanıtlar incelenerek sistemlerin davranışı değerlendirilmeye çalışılır. Bir kontrol sisteminde eğer çıkış işareti giriş işaretini belirli koşullar altında takip etmesi isteniyorsa, giriş ve çıkış işaretleri zaman fonksiyonu olarak karşılaştırılır. Bu nedenle kontrol sistemlerinde sistem davranışının son değerlendirilmesi genellikle hep zaman alanında yapılır.

Bir kontrol sisteminin zaman yanıtı genellikle iki kısımdan oluşur: geçici hal yanıtı ve sürekli hal yanıtı. Eğer $y(t)$ bir sürekli sistem yanıtını ifade ediyorsa, $y_t(t)$ geçici yanıtı ve $y_{ss}(t)$ sürekli yanıtı ifade etmek üzere, genelde $y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t)$ yazılabilir. Kontrol sistemlerinde geçici hal yanıtı, zaman yanıtının, zaman ilerledikçe sığra doğru giden kısmı olarak tanımlanır. buna göre $y_t(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t(t) = 0$$

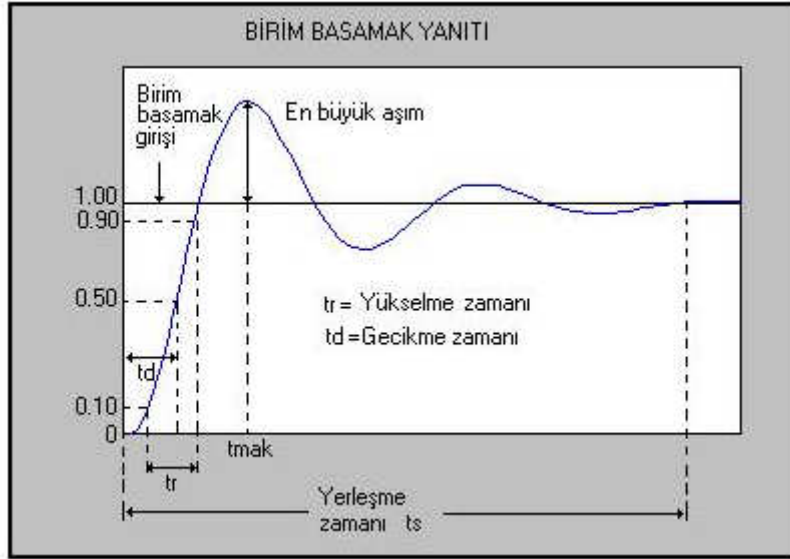
özelliğindedir.

Sürekli hal yanıtı ise, geçici hal yanıtı söndükten sonra, zaman yanıtının geriye kalan kısmıdır.

2.1. Birim Basamak Yanıtı ve Zaman Tanım Bölgesi Kriterleri

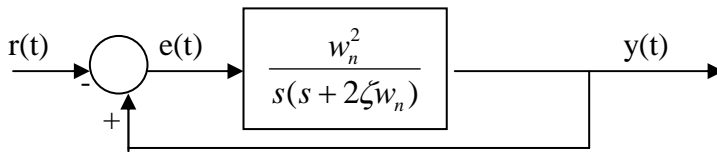
Geçici hal, daha önce belirtildiği gibi, sistem yanıtının zaman ilerledikçe sifıra giden kısmı olarak tanımlanır. Bir kontrol sisteminde geçici hal yanıtının genliği ve süresi katlanabilir bir sınırın altında tutulmalıdır.

Doğrusal kontrol sistemlerinde geçici hal yanıtının değerlendirilmesi genellikle $u_s(t)$ birim basamak yanıtından yararlanılarak yapılır. Kontrol sisteminin birim basamak girişe cevabı birim basamak yanıtı olarak adlandırılır. Şekil-3 de doğrusal bir kontrol sisteminin örneksel birim basamak yanıtı görülmektedir.



Şekil-3. Birim basamak Yanıtı.

Şekil-4 te gösterildiği gibi, ikinci mertebeden bir sistem ele alındığında, birim basamak yanıtı ile ilgili olarak kontrol sistemlerinin zaman tanım bölgesi özellikleri, formüllerle aşağıdaki davranış kriterleri ile değerlendirilir.



Şekil-4. İkinci mertebeden sistem dinamiği

1. En büyük aşım. $Y(t)$ birim basamak yanıtı olmak üzere, $y(t)$ 'nin en büyük değeri y_{max} ve sürekli hal değeri y_{ss} ile belirlenmiş olsun. Buna göre en büyük aşım $= y_{max} - y_{ss}$ olarak tanımlanır ve denklem-2.1 ile gösterilir.

$$Y_{max} - 1 = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (2.1)$$

2. Gecikme zamanı. Gecikme zamanı t_d basamak yanıtının son değerinin yüzde 50 değerine ulaşma zamanı olarak tanımlanır ve denklem-2.2 ile gösterilir.

$$t_d \cong \frac{1+0.7\zeta}{w_n}, \quad 0 < \zeta < 1.0 \quad (2.2)$$

3. Yükselme zamanı. Yükselme zamanı t_r , basmak yanıtının son değerin yüzde 10 değerinden yüzde 90 değerine ulaşma zamanı olarak tanımlanır ve denklem-2.3 ile gösterilir.

$$t_r \cong \frac{0.8+2.5\zeta}{w_n}, \quad 0 < \zeta < 1.0 \quad (2.3)$$

4. Yerleşme zamanı. Yerleşme zamanı t_s , basmak yanıtı son değerinin belirli bir yüzdesine kadar azalması ve bu değerin altında kalması için geçmesi gereken zaman olarak tanımlanır ve denklem-2.4 ile gösterilir. Yüzde 5 çok kullanılan bir değerdir.

$$t_s \cong \frac{3.2}{\zeta w_n}, \quad 0 < \zeta < 0.69 \quad t_s \cong \frac{4.5\zeta}{w_n}, \quad \zeta > 0.69 \quad (2.5)$$

2.2. Frekans Tanım Bölgesi Kriterleri

Uygulamada bir kontrol sisteminin davranışı, en gerçekçi ve doğru olarak ancak zaman tanım bölgesi kriterleri ile belirlenir. Bunun nedeni, kontrol sistemlerinde davranışların genellikle sisteme uygulanan test işaretleri etkisinde sistem yanıtına göre değerlendirilir. Fakat yüksek mertebeden kontrol sistemlerinde zaman tanım bölgesi yanıtına ilişkin analitik ifadelerin çok zor elde edilmektedir. Diğer taraftan frekans tanım bölgesinde düşük mertebeden sistemlerle sınırlı kalmayan çok sayıda grafiksel yöntem bulunmaktadır. Kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımların frekans bölgesinde yapılmasının nedenlerin başında kolaylık ve uygun analitik yöntemlerinin olmasıdır.

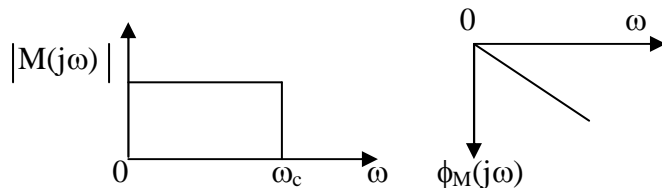
Kapalı çevrimli bir sistemin frekans yanıtını tanımlayacak olursak, bilindiği gibi tek çevrimli bir kontrol sisteminin kapalı çevrim fonksiyonu

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \quad \text{şeklindedir.}$$

Sinüsoidal sürekli halde $s = j\omega$ yazıldığında sinüsoidal sürekli hal $M(j\omega)$ transfer fonksiyonu

$$M(j\omega) = |M(j\omega)| \angle M(j\omega) \quad \text{şeklinde genlik ve faz olarak tanımlanır.}$$

$M(s)$ bir elektrik filtresinin giriş-çıkış transfer fonksiyonu ifade etmesi halinde, $M(j\omega)$ 'nın genlik ve fazı filtrenin giriş işaretini filtreleme özelliğini belirler. Şekilde ω_c frekansında keskin kesme özelliği olan ideal bir alçak geçiren bir filtrenin genlik ve faz karakteristiği görülmektedir. Kontrol sistemlerinin tasarımı pek çok yönden filtre tasarımına benzer ve kontrol sistemi bir işaret işlemcisi gibi değerlendirilebilir.

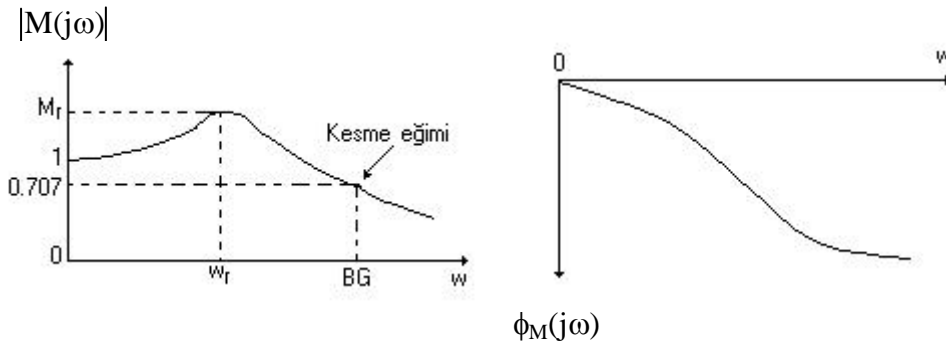


Frekans tanım bölgesi yöntemleri kullanılarak tasarlanan doğrusal kontrol sistemlerinde sistemlerin davranışlarını belirlemek için bir dizi kriter tanımlamak gerekir. En büyük aşım sönüm oranı gibi zaman bölgesinde tanımlanmış kriterler frekans tanım bölgesinde doğrudan kullanılamaz. Fakat frekans tanım bölgesinde kullanılan kriterler aşağıda verilmiştir.

Rezonans Tepesi M_r

M_r rezonans tepesi $|M(j\omega)|$ 'nin maksimum değeridir. Genelde M_r genliği bize görelî kararlılığı hakkında bilgi verir. Genellikle büyük bir M_r sistem basamak yanıtında büyük bir aşım karşı düşer. Uygulamada kontrol sistemlerinde rezonans tepesi 1.1 ile 1.5 arasında bulunması istenir. İkinci mertebeden sistemlerde rezonans tepesi ζ 'nin fonksiyonu olarak denklem-2.6 ile ifade edilir.

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \zeta \leq 0.707 \quad (2.6)$$



Şekil-5 Rezonans Tepesi.

Bandgenişliği BG

BG bandgenişliği $|M(j\omega)|$ 'nın sıfır frekansına göre yüzde 70.7 ya da 3 dB düştüğü frekanstır. Genelde bandgenişliği kontrol sisteminin zaman tanım bölgesinde geçici hal yanıtı hakkında bilgi verir. Büyük bandgenişliği yüksek frekanslı işaretlerin sistemden iletilmesini olanak kıldığından, kısa yükselme zamanına düşer. Bandgenişliğinin küçük olması sistemden sadece görelî düşük frekanslar aktarılabilir ve sistemin zaman yanıtı ağırlaşır. Buna göre ikinci mertebeden bir sistemin bandgenişliği denklem-2.7 ile ifade edilir.

$$BG = \left[(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

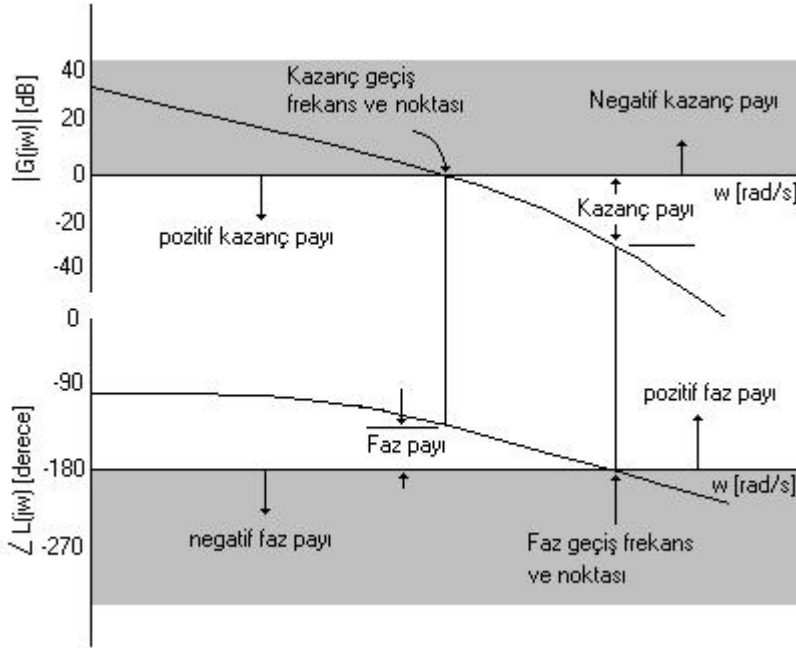
buna göre ikinci mertebeden sistemlerde terimler arasındaki ilişkiyi özetleyecek olursak:

- Bandgenişliği ve yükselme zamanı ters orantılıdır.
- Bandgenişliği arttıkça sistem yanıtı hızlanır.
- ω_n arttıkça bandgenişliği artar yükselme zamanı azalır.
- ζ arttıkça bandgenişliği azalır ve yükselme zamanı artar.

Görelî Kararlılık: Kazanç Payı ve Faz Payı

Tasarımcı sistemin mutlak kararlılığı kadar ne kadar kararlı olduğu ile de ilgilidir. Bu kavram genellikle görelî kararlılık olarak bilinir. Zaman tanım bölgesinde görelî kararlılık aşım ve sönüm oranı gibi parametrelerle ölçülür. Frekans tanım bölgesinde ise M_r rezonans tepesi ile ifade edilir.

Kazanç payı ve faz payının bode diyagramı üzerinde gösterilişi Şekil-6'da verilmiştir.



Şekil-6. Bode diyagramı kriterleri.

3. PD Kontrolörüyle Tasarım

Bir kontrol işleminde, kontrol işareti kontrolör çıkışına sabit bir oranla aktarıldığında, **oransal kontrol** olarak adlandırılır. Sezgisel olarak, oransal işleve ilave olarak, giriş işaretinin türevinden veya integralinden de yararlanılabilir. Uygulamada çok sık kullanılan PID kontrolörü, **oransal** (P=Proportional), **integral** (I=Integral) ve **türevsel** (D=Derivative) işlevleri ifade eden kelimelerin baş harfleriyle adlandırılır. Bu kontrolörleri özümseyebilmek için önce PD kontrolörünü göz önüne alalım.

Şekil 3-1 deki geribeslemeli bir kontrol sistemine ait blok diyagramında, kontrol edilen sistemin transfer fonksiyonu

$$G_p(s) = \frac{w_n^2}{s(s + 2\zeta w_n)} \quad (3.1)$$

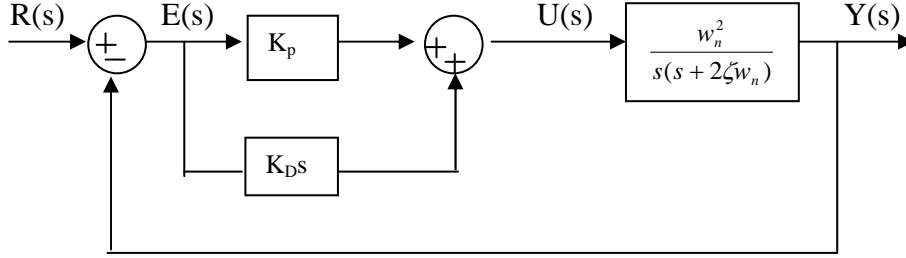
İkinci mertebeden bir örnek sistem olarak verilmiş olsun. Seri kontrolör transfer fonksiyonu

$$G_c(s) = K_p + K_D s$$

Şeklinde oransal-türevsel (PD) türündendir. Buna göre sisteme uygulanan kontrol işareti, K_p ve K_D oranı ve türev katsayıları olmak üzere,

$$u(t) = K_p e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (3.2)$$

şeklindedir.



Şekil-3.1. PD Kontrol sistemi blok diyagramı

Uygun tasarlanmış bir PD kontrolörü kontrol sistem davranışını şu şekilde etkiler:

- sönümü artırır ve en büyük aşımı azaltır.
- Yükselme zamanı ve yerleşme zamanı azaltır.
- Bandgenişliğini artırır.
- Kazanç payı, faz payı ve rezonans tepesini düzeltir.
- Yüksek frekans gürültüsünü arttırabilir.
- Az sönümlü ya da kararsız sistemlerde etkili olmaz.
- Devrenin tasarımında görece büyük kapasitelere ihtiyaç duyabilir.

Aşağıdaki örnekte ikinci mertebeden bir sistemin PD kontrolörüyle zaman ve frekans tanım bölgesinde nasıl etkilendiği tartışılacaktır.

Örnek:

Transfer fonksiyonu

$$G_p(s) = \frac{4500K}{s(s + 361.2)} \quad (3.3)$$

olarak verilen ikinci mertebeden bir kontrol sisteminin davranış kriterleri aşağıdaki şekilde seçildiğini varsayalım:

- Birim basamak girişe karşı kararlı hal hatası ≤ 0.000443
- Aşım $\leq 5\%$
- Yükselme zamanı $t_r \leq 0.005$ saniye
- Yerleşme zamanı $t_s \leq 0.005$ saniye

Kararlı hal hataları ile ilgili kriterleri sağlamak için K kazancı:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s.G_p(s) = \frac{4500K}{361.2} = \frac{1}{0.000443} \Rightarrow K = 181.17 \text{ olmalıdır. Ancak bu K değeri için}$$

sistemin sönüm oranı 0.2 ve aşım %52.7' dir. Birim basamak yanıtında kararlı hal hatası 0.000443 kalacak, sistemin sönüm oranı ve en büyük aşım düzelecek şekilde sisteme bir seri PD kontrolörü uygulayalım.

Zaman Tanım Bölgesi Tasarımı

PD kontrolörü ve $K=181.17$ için sistem ileri yol transfer fonksiyonu

$$G(s) = G_p(s)G_c(s) = \frac{815265(K_p + K_D s)}{s(s + 361.2)} \quad (3.4)$$

olarak elde edilir. Bu durumda kapalı çevrim transfer fonksiyonu:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{815265(K_p + K_D s)}{s^2 + (361.2 + 815265K_D)s + 815265K_p} \quad (3.5)$$

ve hız katsayısı

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{815265K_p}{361.2} = 2257.1K_p \quad (3.6)$$

şeklindedir. Birim basamak rampa girişi için kararlı hal hatası $e_{ss} = 1/K_v = 0.000443/K_p$ olarak hesaplanır. Kapalı çevrim transfer fonksiyonunda görüldüğü gibi PD kontrolörü sistemi iki şekilde etkiler:

1. Kapalı çevrimli sisteme $s = -K_p/K_D$ ' de bir sıfır ekler.
2. s teriminin çarpanı 361.2 ' den $361.2 + 815265K_D$ ' arttırarak sönüm oranını etkiler.

Karakteristik denklem

$$s^2 + (361.2 + 815265K_D)s + 815265K_p = 0 \quad (3.7)$$

şeklinde yazılır. Kararlı hal hatası ile ilgili koşul sağlandığına göre $K_p=1$ olarak seçilebilir. Bu durumda, sistemin sönüm oranı

$$\zeta = \frac{361.2 + 815265K_D}{1805.84} = 0.2 + 451.46K_D \quad (3.8)$$

ilişkisinde görüldüğü gibi, K_D sönümü davranışı olumlu yönde etkiler. Eğer $\zeta=1$ ya da sönüm oranının kritik olması istenirse $K_D=0.001772$ olması gerektiği görülür. Ancak denklem-3.4 artık ikinci mertebeden bir sistemi ifade etmediğini belirtmek gerekir. Geçici yanıt transfer fonksiyonunun $s = -K_p/K_D$ sıfırıyla da etkilenir. Bu ikinci mertebeden sistemde K_D arttıkça sıfır koordinatına doğru yaklaşır ve neticede $G(s)$ 'in $s=0$ ' daki kutbunu siler. Buna göre K_D arttıkça denklem-3.4' teki transfer fonksiyonu, kutbu $s=-361.2$ 'de bulunan, birinci mertebeden bir sisteme dönüşür ve aşım oluşmaz. Yüksek mertebeden sistemlerde $s = -K_p/K_D$ sıfırı K_D arttıkça genellikle aşımın artmasına neden olur.

Denklem-3.7' deki karakteristik denklemde K_p ve K_D değişiminin etkisini incelemek için kök çevreleri yöntemi uygulanabilir. Karakteristik denklemde K_D sıfıra eşitlenirse

$$s^2 + 361.2s + 815265K_p = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir. K_p 0 ile ∞ arasında değiştirilirse şekil-3.2' de görülen kök yer eğrisi elde edilir.

Şekil-3.2. PD kontrolör için kök eğrisi

$K_D \neq 0$ için 3.7' nolu karakteristik denklemeden

$$1 + G_{es} = 1 + \frac{815265K_D s}{s^2 + 361.2s + 815265K_p} = 0 \quad (3.10)$$

eşdeğer denklemi yazılabilir. K_p sabit K_D değişken kök çevreleri $G_{es}(s)$ 'in kutup sıfır yerleşimine göre oluşturulur. Şekil-3.3' de $K_p = 0.25$ ve $K_p = 1$ için çizimler verilmiştir. $K_p = 1$ ve $K_D = 0$ için karakteristik denklemin köklerinin $-180.6 + j884.67$ ve $-180.6 - j884.67$ ve kapalı çevrim sönüm oranının 0.2 olduğu görülür. K_D değeri arttıkça karakteristik denklemin kökleri bir daire yayını izleyerek gerçek eksene doğru yaklaşır. K_D nin değeri 0.00177 'ye ulaştınca kritik sönüme karşı düşen -902.92 değerine eşit gerçek kökler elde edilir. K_D değişkeni 0.00177 'nin ötesinde arttırılırsa, karakteristik denklemin farklı gerçek kökleri için sistem aşırı sönümlüdür. Şekil-3.4'te PD kontrolsüz ve $K_p = 1$, $K_D = 0.00177$ için birim basamak yanıtı görülmektedir. Tablo-3.1 deki yükselme ve yerleşme zamanı kriterlerinin tümü $K_D \geq 0.00177$

için sağlanır. Özet olarak PD kontrolörü genellikle en büyük aşımı, yükselme zamanı ve yerleşme zamanını azaltır.

Şekil-3.3 K_D ' nin iki farklı değeri için kök eğrisi

Tablol-3.1. PD kontrolör örneğine ilişkin parametre değerleri

K_D	t_r [saniye]	t_s [saniye]	Aşım [%]
0	0.00125	0.0151	52.2
0.0005	0.0076	0.0076	25.7
0.00177	0.00119	0.0049	4.2
0.0025	0.00103	0.0013	0.7

Şekil-3.4. PD kontrolör sistem cevabı

Frekans Tanım Bölgesi Tasarımı

Aşağıdaki davranış kriterlerinin verildiğini varsayalım:

- Birim rampa girişe karşı kararlı hal hatası ≤ 0.000443
- Faz payı $\geq 80^\circ$
- Rezonans Tepesi $M_r \leq 1.05$
- BG ≤ 2000 rad/sn

$K_p=1$, $K_D=0$, 0.005, 0.00177 ve 0.0025 için $G(s)$ ' ye ilişkin Bode diyagramları Şekil-3.5'de gösterilmiştir.

Şekil-3.5. PD kontrolörünün Bode diyagramı

Sistemin davranış kriter ölçüleri karşılaştırmak amacıyla zaman tanım bölgesi kriter değerleri ile birlikte çeşitli kontrolör parametreleri için tablo-3.2’de listelenmiştir.

Tablo-3.2 PD kontrolörünün frekans tanım bölgesi kriterleri

K_D	KP	FP	KGF	BG	M_r	t_r	t_s	Aşım
0	∞	22.68	868	1370	2.522	0.00125	0.0151	52.2
0.0005	∞	46.2	913.5	1326	1.381	0.0076	0.0076	25.7
0.00177	∞	82.92	1502	1669	1.025	0.00119	0.0049	4.2
0.0025	∞	88.95	2046	2083	1.000	0.00103	0.0013	0.7

Kritik çözüme karşı düşen $K_D = 0.00177$ için faz payı $FP=82.92^0$ ve rezonans tepesi $M_r=1.025$ ve bandgenişliği $BG=1669$ rad/sn’ dir. Bu durumda frekans tanım bölgesi kriterlerinin tümü sağlanır.

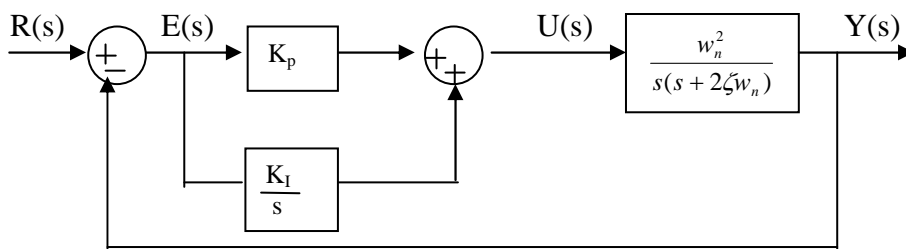
4. PI Kontrolörlerle Tasarım

PD kontrolörünün sistemin sönümünü ve yükselme zamanını, daha büyük band genişliği ve rezonans frekansı uğruna düzelttiği ve birim basamak girişinde görüldüğü gibi zamanla değişmeyen girişlerde kontrolörün kararlı hal hatalarını etkilemediği görülmüştü. Buna göre PD kontrolü öngörülen hedefleri sağlamayabilir.

PID kontrolörünün integral kısmı kontrolör giriş işaretinin zaman integrali ile orantılı bir işaret üretir. Şekil-4.1’de seri PI kontrolörü ikinci mertebeden örnek bir kontrol sistemi görülmektedir. PI kontrolörünün transfer fonksiyonu

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \quad (4.1)$$

şeklindedir.



Şekil – 4.1. PI kontrolör blok diyagramı

Uygun tasarlanmış bir PI kontrolörü kontrol sistem davranışını şu şekilde etkiler:

- sönümü düzeltir ve aşımı azaltır.
- Yükselme zamanını artırır.
- Bandgenişliğini azaltır.
- Kazanç payı, faz payı ve rezonans tepesini iyileştirir.
- Yüksek frekans gürültülerini süzer.
- Kontrolör devresindeki kapasite değerinin çok büyük olmaması için uygun seçilmesi gereken K_I ve K_P değerleri PD kontrolünde daha sınırlıdır.

Aşağıdaki örnekte ikinci mertebeden bir sistemin PD kontrolörüyle zaman ve frekans tanım bölgesinde nasıl etkilendiği tartışılacaktır.

Örnek:

Transfer fonksiyonu

$$G_p(s) = \frac{4500K}{s(s + 361.2)} \quad (4.2)$$

olarak verilen bir sisteme, PI kontrolörü uygulanırsa sistemin ileri yol transfer fonksiyonu:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{4500KK_p(s + K_I/K_p)}{s^2(s + 361.2)} \quad (4.3)$$

olarak elde edilir.

Zaman Tanım Bölgesi Tasarımı

Zaman tanım bölgesi kriterleri şu şekilde belirlenmiş olsun:

- Parabolik giriş işareti $t^2u_s(t)/2$ için kararlı hal hatası ≤ 0.2
- Aşım $\leq \%5$
- Yükselme zamanı $t_r \leq 0.01$ saniye
- Yerleşme zamanı $t_s \leq 0.02$ saniye

Bu sistemi anlamlı tasarlayabilmek için yükselme ve yerleşme zamanlarını gevşetmemiz gerekir.

İvme hata katsayısı

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \frac{4500KK_I}{361.2} = 12.46KK_I \quad (4.4)$$

Olarak elde edilir. Parabolik giriş için kararlı hal hatası

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{0.08026}{KK_I} (\leq 0.2) \quad (4.5)$$

şeklindedir. PD kontrolöründe kullanılmış olan $K=181.17$ değerini seçelim. Parabolik giriş için belirli bir kararlı hal hatasını sağlamak için K büyük tutuldukça K_I küçülebilir. Eğer (4.5) nolu ilişkide 0.2 en küçük kararlı hal hatası koşulu ve $K=181.17$ için çözümlerse, K_I 'nin alabileceği en küçük değer 0.002215 olarak elde edilir. Gerekirse K değerinde ileride ayarlama yapılabilir. $K=181.17$ için kapalı çevrim sisteminin karakteristik denklemi

$$s^3 + 361.2s^2 + 815265K_p s + 815265K_I = 0 \quad (4.6)$$

bulunur. Routh testi uygulanırsa sistemin $0 \leq K_I/K_p \leq 361.2$ için kararlı olduğu görülür. Buna göre $G(s)$ in sıfırı $s = -K_I/K_p$, s -düzleminde çok fazla sola yerleştirilemez. Aksi halde sistem kararsız hale gelir. Bu nedenle $-K_I/K_p$ sıfırı koordinat merkezine yakın yerleştirilir. Buna göre K_I/K_p oranı

$$\frac{K_I}{K_P} \ll 361.2 \quad (4.7)$$

koşulu sağlanacak şekilde seçilmelidir. $K_I/K_P=10$ için kök eğrisi şekilde görülmektedir. 4.7 nolu denklem şartı sağlandığında (4.3) nolu denklem

$$G(s) \cong \frac{815265K_P}{s(s+361.2)} \quad (4.8)$$

yaklaşık ifade edilebilir. Görelî sönüm oranının 0.707 olmasını istediğimizi varsayalım. Bu sönüm oranı için K_P nin (4.8) ilişkisinde 0.08 olması gerektiği hesaplanır. Şu halde $K_P=0.08$, $K_I=0.8$ için şekil-4.2' deki kök eğrisi iki karmaşık kökün görelî sönüm oranını yaklaşık 0.707 olarak verir. Bu durumda karakteristik denklemin üç kutbu

$$s_1=-10.605 \quad s_2=-175.3+j175.4 \quad s_3=-175.3-j175.4$$

olarak elde edilir. $K_P=0.08$ ve K_I değeri (4.7) nolu koşulu sağladığı sürece karmaşık kutupların görelî sönüm oranı 0.707 ye yakın kalır.

Şekil-4.2. PI kontrolöre ilişkin kök eğrisi

Tablo-4.1'de sönüm oranı, 0.707, $K_P=0.08$ ve çeşitli K_I/K_P değerlerine karşı gelen PI kontrolörlü sistemin birim basamak yanıtına ilişkin değerler verilmiştir. Tablodaki sonuçlar,

PI kontrolünün en büyük aşım yükselme zamanı uğruna azalttığı görülmüştür. Tabloda $K_I \leq 1$ için yerleşme zamanında ani bir azalma görülür. K_P yi 0.08 den küçük seçerek aşım azaltılabilir fakat yükselme ve yerleşme zamanları artar.

Tablo-4.1. PI kontrolör örneğine ilişkin parametre değerleri

K_I/K_P	K_I	K_P	Aşım (%)	t_r (s)	t_s (s)
0	0	1.00	52.7	0.00135	0.015
20	1.60	0.08	15.16	0.0074	0.049
10	0.80	0.08	9.93	0.0078	0.0294
5	0.40	0.08	7.17	0.0080	0.023
2	0.160	0.08	5.47	0.0083	0.0194
1	0.08	0.08	4.89	0.0084	0.0114
0.5	0.04	0.08	4.61	0.0084	0.0114
0.1	0.008	0.08	4.38	0.0084	0.0115

Şekil-4.3' de $K_P = 0.08$ ve çeşitli K_I değerleri için PI kontrolörlü sistemin birim basamak yanıtı verilmiştir. Karşılaştırılmak için PD kontrolöründe eklenmiştir.

Şekil-4.3. PI kontrolörü sistem yanıtı

Frekans Tanım Bölgesi Tasarımı

Özgün sistemin $G(s)$ ileri yol transfer fonksiyonu (4.9) ilişkisinde $K_P=1$ ve $K_I=0$ alınarak elde edilir.

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{4500KK_p(s + K_I / K_P)}{s^2(s + 361.2)} \quad (4.9)$$

Şekil-4.4' de görülen Bode diyagramına göre özgün sistemin faz payı 22.68^0 ve kazanç geçiş frekansı 868 rad/s'dir.

Ön görülen faz payının en az 65^0 olacağını kabul ederek PI kontrolörünü tasarlayalım. PI kontrolöründe aşağıdaki adımlar atılmalıdır.

1. 65^0 faz payının gerçekleştiği yeni kazanç geçiş frekansı ω_g^1 belirlenir. Şekil-4.4'te bu değer 170 rad/s olduğu görülür. Bu frekansta $G(j\omega)$ 'nin modülü 21.5 dB'dir. Buna göre PI kontrolörü $\omega_g^1=170$ rad/s'de -21.5 dB'lik zayıflama getirmelidir. Bunun elde edilmesi için:

$$K_P = 10^{-|G(j\omega_g^1)|_{dB}/20} = 10^{-21.5/20} = 0.084 \quad (4.10)$$

elde edilir. Daha önceki zaman tanım bölgesinde K_P değerinin 0.08 olarak seçildiği hatırlanırsa, karmaşık karakteristik denklemin köklerine ilişkin göreceli sönüm oranının yaklaşık 0.707 olacağı görülür.

2. Frekans tanım bölgesi sonuçlarını daha önceki zaman tanım bölgesi sonuçları ile karşılaştırabilmek için $K_P=0.08$ seçilir. K_P seçildiğinde K_I 'nin seçilmesi gerektiğini belirler. Buna göre

$$K_I = \frac{\omega_g^1 K_P}{10} = \frac{170 * 0.08}{10} = 1.36 \quad (4.11)$$

alınmalıdır. Daha önce belirtildiği gibi K_I/K_P oranı $G(s)$ 'nin -361.2' deki kutbun genliğinden yeterli derecede küçük olduğu sürece K_I değeri değiştirilebilir.

Şekil-4.4'te $K_P=0.08$ ve $K_I=0.008$, 0.08 ve 1.6 için ileri yol transfer fonksiyonuna ilişkin Bode diyagramları ve tablo-4.2'de ilgili frekans tanım bölgesi kriterleri görülmektedir. Yeterli derecede küçük K_I/K_P oranları için faz payı, M_r , BG ve kazanç geçiş frekansı gibi değerlerin çok az değiştiği görülmektedir.

Tablo-4.2.PI kontrolörünün frekans tanım bölgesi kriterleri

K_I/K_P	K_I	K_P	KP (dB)	FP (derece)	M_r	BG (rad/s)	KGF (rad/s)	FGF (rad/s)
0	0	1.00	∞	22.6	2.55	1390.87	868	∞
20	1.6	0.08	∞	58.45	1.12	268.92	165.73	∞
10	0.8	0.08	∞	61.98	1.06	262.38	164.96	∞
5	0.4	0.08	∞	63.75	1.03	258.95	164.77	∞
1	0.08	0.08	∞	63.15	1.01	256.13	164.71	∞
0.1	0.008	0.08	∞	65.47	1.00	255.49	164.70	∞

Şekil-4.4. PI kontrolörüne ilişkin Bode diyagramı

5. PID Kontrolörüyle Tasarım

Önceki tartışmalarda PD kontrolünün sisteme zayıflama getirdiği ancak sistemin kararlı hal davranışını etkilemediği görülmüştü. PI kontrolörünün ise, görece kararlılığı ve aynı zamanda kararlı hal hatalarını düzelttiği, ancak yükselme zamanının arttığı belirtilmişti. Bu sonuçlar bizi, PI ve PD kontrolörlerinin iyi yönlerinden yararlanmayı sağlayan, PID kontrolünü kullanmaya yöneltir. PID kontrolörünün tasarımı için aşağıdaki yol izlenebilir.

1. PID kontrolörü seri bağlı PI ve PD kısımlarından oluşur. PID kontrolörünün transfer fonksiyonu

$$G_C(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = (1 + K_{D1}s)(K_{P2} + \frac{K_{I2}}{s}) \quad (5.1)$$

şeklinde yazılabilir. PID kontrolünde sadece üç parametreye ihtiyaç olduğundan PD kısmının orantı katsayısı birim alınır. Denklem-5.1'in iki tarafı eşitlenirse

$$K_P = K_{P2} + K_{D1}K_{I2}$$

$$K_D = K_{D1} K_{P2}$$

$$K_I = K_{I2}$$

Elde edilir.

2. Sadece PD kısmının etkin olduğunu varsayalım. K_{D1} değerini görece kararlılığın bir kısmı yerine gelecek şekilde seçilir. Zaman tanım bölgesinde bu görece kararlılık en büyük aşım ve frekans tanım bölgesinde faz payı ile değerlendirilir.
3. K_{I2} ve K_{P2} parametreleri tüm görece kararlılık koşulları sağlanacak şekilde seçilir.

Örnek:

Transfer fonksiyonu

$$G_p(s) = \frac{1.5 * 10^7 K}{s(s^2 + 3408.3s + 1204000)} \quad (5.2)$$

olarak verilen üçüncü mertebeden bir sistemi göz önüne alalım. $K=181.17$ için transfer fonksiyonu

$$G_p(s) = \frac{2.718 * 10^9}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \quad (5.3)$$

Şeklindedir.

Zaman Tanım Bölgesi Tasarımı

Zaman tanım bölgesi kriterleri şu şekilde verilmiş olsun:

- Parabolik $t^2 u_s(t)/2$ girişi için kararlı hal hatası ≤ 0.2 ,
- Aşım $\leq \%5$,
- Yükselme zamanı $t_r \leq 0.005$ saniye,
- Yerleşme zamanı $t_s \leq 0.005$ saniye.

İlk olarak transfer fonksiyonu $(1+K_{D1}s)$ olan PD kontrolörünün uygulandığını varsayalım. Bu durumda ileri yol transfer fonksiyonu

$$G(s) = G_p(s)G_c(s) = \frac{2.718 * 10^9 (1 + K_{D1}s)}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \quad (5.4)$$

şekline gelir. Kapalı çevrim sisteminin karakteristik denklemini

$$s^3 + 3408.3s^2 + (1204000 + 2.718 * 10^9 K_D)s + 2.718 * 10^9 = 0 \quad (5.5)$$

Şeklinde yazılabilir. Eşdeğer transfer fonksiyonu elde edilirse

$$G_{eş}(s) = \frac{2.718 * 10^9 K_D s}{(s + 3293.3)(s + 57.49 + j906.6)(s + 57.49 - j906.6)} \quad (5.6)$$

elde edilir. Karakteristik denklemin $G_{eş}(s)$ ' in kutup-sıfırına göre şekil-5.1' deki gibi elde edilir.

Buna göre $K_{D1}=0.002$ için % 11.37 lik en küçük aşım, yükselme zamanı=0.0008 ve yerleşme zamanı=0.00255 olarak elde edilir. Böylece yükselme ve yerleşme zamanı kriterleri sağlanmış olur.

İkinci olarak sisteme PI kontrolörü eklenirse ileri yol transfer fonksiyonu

$$G(s) = G_p(s)G_c(s) = \frac{5.436 * 10^6 K_{P2} (s + 500)(s + K_{I2} / K_{P2})}{s^2 (s + 400.26)(s + 3008)} \quad (5.7)$$

şekline gelir. Tasarım yöntemine uygun görece küçük bir K_{I2} / K_{P2} belirlemek için $K_{I2} / K_{P2} = 15$ seçelim. Bu durumda (5.7) nolu ilişki

$$G(s) = \frac{5.436 * 10^6 K_{P2} (s + 500)(s + 15)}{s^2 (s + 400.26)(s + 3008)} \quad (5.8)$$

şekline dönüşür. Tablo-5.1'de çeşitli K_{P2} değerleri için zaman tanım bölgesi kriter ve değerleri verilmiştir.

Şekil-5.1. PID kontrolörüne ilişkin kök eğrisi

Tablo-5.1. PID kontrolörüne ilişkin zaman tanım bölgesi kriterleri

K_{P2}	Aşım (%)	t_r (s)	t_s (s)
1.0	11.1	0.00088	0.0025
0.9	10.8	0.00111	0.00202
0.8	9.3	0.00127	0.00303
0.7	8.2	0.00130	0.00303
0.6	6.9	0.00155	0.00303
0.5	5.6	0.00172	0.00404
0.4	5.1	0.00214	0.00505
0.3	4.8	0.00271	0.00303
0.2	4.5	0.00400	0.00404
0.1	5.6	0.00747	0.00747
0.08	6.5	0.00895	0.04545

Görüldüğü gibi optimal değerler 0.2 ve 0.4 civarında yer alır. $K_{P2} = 0.3$ seçilirse

$$K_P = K_{P2} + K_{D1}K_{I2} = 0.3 + 0.002 * 4.5 = 0.309$$

$$K_D = K_{D1} K_{P2} = 0.002 * 0.3 = 0.0006$$

$$K_I = K_{I2} = 4.5$$

Olarak elde edilir. Şekil-5.2' de, PID kontrolörlü sistemin birim basamak yanıtı PI ve PD kontrolörlü sistem yanıtları ile beraber verilmiştir.

Şekil-5.2. PID kontrolörü sistem yanıtı

Frekans Tanım Bölgesi Tasarımı

PD kontrolörünün başarabileceği $K_D = 0.002$ için en iyi aşım %11.37 olarak elde edilmiş idi. Bundan yararlanılarak ileri yol transfer fonksiyonu

$$G(s) = G_P(s)G_C(s) = \frac{2.718 * 10^9 (1 + 0.002s)}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \quad (5.9)$$

olarak elde edilir. Buna ilişkin bode diyagramı şekil-5.3' de verilmiştir. Bu problemde, zaman tanım bölgesi kriterlerine karşı düşen, aşağıdaki frekans tanım bölgesi kriterlerinin verilmiş olduğunu varsayalım:

- Faz payı $\geq 70^\circ$,
- $BG \geq 1000$ rad/s,
- $M_r \leq 1.1$.

Bode diyagramında 70° lik faz payını gerçeklemek için yeni faz geçiş frekansının $\omega_g' = 811$ rad/s olması gerektiği ve bu frekansta $G(j\omega)$ genliğinin 7 dB olduğu görülür. Buna göre K_{P2} katsayısı

$$K_{P2} = 10^{-|G(j\omega_g')|_{dB} / 20} = 10^{-7/20} = 0.45 \quad (5.10)$$

olarak hesaplanır. Zaman tanım bölgesi tasarımında geçerli K_{P2} aralığı $K_{12} / K_{P2} = 15$ ilişkisinde 0.2 ile 0.4 arasında bulunmuştu. (5.10) nolu ilişkide elde edilen sonuç bu bölgenin az dışına düşer. Tablo-5.2'de frekans tanım bölgesi kriterlerinden $K_D = 0.002$ için, K_{12} / K_{P2} azaldıkça faz payının sürekli azaldığını, ancak $K_{P2} = 0.2$ ' nin altında aşımın ilginç olarak arttığını kaydedelim.

Şekil-5.3. PID kontrolörü Bode diyagramı.

Tablo-5.2. PID kontrolörü
frekans tanım bölgesi kriterleri

K_{P2}	K_{I2}	KP (dB)	FP (derece)	M_r	BG (rad/s)	t_r (s)	t_s (s)	Aşım (%)
1.00	0	∞	58.45	1.07	2607	0.0008	0.00255	11.37
0.45	6.75	∞	68.5	1.03	1180	0.0019	0.0040	5.6
0.40	6.00	∞	69.3	1.027	1061	0.0021	0.0050	5.0
0.30	4.50	∞	71.45	1.024	1024	0.0027	0.00303	4.8
0.20	3.00	∞	73.88	1.031	528.8	0.0040	0.00404	4.5
0.10	1.5	∞	76.91	1.054	269.5	0.0076	0.0303	5.6
0.08	1.2	∞	77.44	1.065	216.9	0.0092	0.00469	6.5

6. Dijital PID Kontrolörü Tasarımı

Dijital kontrol sistemlerin tasarımı sürekli kontrol sistemlerin tasarımına eşdeğerdir. Buradaki hedef de sistem kriterlerine uygun bir şekilde davranmaya yönelen, bir kontrolör tasarlamaktır. Gerçekte kontrol edilecek sistem aynıdır, tek fark dijital sistemlerde örneklenmiş veriyi işleyebilecek yetenekte olmasıdır.

Sürekli PID kontrolörünün transfer fonksiyonu

$$G_c(s) = K_p + K_D s + \frac{K_I}{s} \quad (6.1)$$

olarak ifade edilmişti. Ayrıca sayısal türev alıcının z-transformu, K_D oranı katsayısı olmak üzere,

$$G_D(z) = K_D \frac{(z-1)}{Tz} \quad (6.2)$$

şeklindedir. Bir fonksiyon alanını sayısal yaklaşık olarak elde etmenin temel üç yöntemi vardır; yamuk integrasyon, ileri dikkörtgen integrasyon ve geri dikkörtgen integrasyon. Buna göre yamuk integrasyonda, K_I oranı katsayısı olmak üzere, sayısal integratörün transfer fonksiyonu

$$G_I(z) = \frac{K_I T(z-1)}{2(z-1)} \quad (6.3)$$

olarak elde edilir. İleri dikkörtgen integrasyonda ise K_I katsayı olmak üzere, transfer fonksiyonu,

$$G_I(z) = \frac{K_I Tz}{(z-1)} \quad (6.4)$$

olarak bulunur. Geri dikkörtgen integrasyonda ise K_I katsayı olmak üzere, transfer fonksiyonu,

$$G_I(z) = \frac{K_I T}{(z-1)} \quad (6.5)$$

olarak elde edilir.

Yukarıdaki açıklanan oran, türev ve integral alma işlemleri birleştirilirse, bir sayısal PID kontrolörünün aşağıdaki farklı transfer fonksiyonları ile modellenebileceği görülür:

Yamuk integrasyon

$$G_C(z) = \frac{(K_P + TK_I/2 + K_D/T)z^2 + (TK_I/2 - K_P - 2K_D/T)z + K_D/T}{z(z-1)} \quad (6.6)$$

İleri dikkörtgen integrasyon

$$G_C(z) = \frac{(K_P + TK_I + K_D/T)z^2 - (K_P + 2K_D/T)z + K_D/T}{z(z-1)} \quad (6.7)$$

Geri dikkörtgen integrasyon

$$G_C(z) = \frac{(K_P + K_D/T)z^2 + (TK_I - K_P - 2K_D/T)z + K_D/T}{z(z-1)} \quad (6.8)$$

Bilinear-Dönüşüm integrasyonu

$$G_C(z) = \frac{(2K_P T + K_I T^2 + 2K_D)z^2 + (K_I T^2 - 2K_P T - 4K_D)z + 2K_D}{2Tz(z-1)} \quad (6.9)$$

olarak yazılabilirler.

Dijital PD Kontrolör Tasarımı

6.6-6.9 denklemlerinde $K_I = 0$ yazıldığında dijital PD kontrolörü

$$G_C(z) = \frac{(K_P T + K_D)z - K_D}{Tz} \quad (6.10)$$

transfer fonksiyonu ile ifade edilir. $G_C(z)$ ' nin sistem kararlı hal hatasını etkilememesi yada $G_C(1)=1$ koşulunu sağlanması için $K_P=1$ olarak seçilir.

Örnek

Örnekleme periyodu 0.01 saniye olarak verilen sistemin transfer fonksiyonu

$$G_p(s) = \frac{2500K}{s(s+25)} \quad (6.11)$$

olarak verilen sistemde Zero order hold ile beraber z-dönüşümü:

$$G_{ho} G_p(z) = (1-z^{-1}) \zeta \left(\frac{2500K}{s^2(s+25)} \right) = \frac{0.1152z + 0.106}{(z-1)(z-0.7788)} \quad (6.12)$$

olarak bulunur. Sistemin ileri yol transfer fonksiyonu

$$G(z) = \frac{(1 + 100K_D)z - 100K_D}{z} \cdot \frac{0.1152z + 0.106}{(z - 1)(z - 0.7788)} \quad (6.13)$$

K_D etkisini incelemek için kök çevreleri yönteminden yararlanılabilir. Kapalı çevrimli sistemin karakteristik denklemi

$$z(z^2 - 1.663z + 0.8848) + 11.52K_D(z - 1)(z + 0.9217) = 0 \quad (6.14)$$

şeklindedir. Karakteristik denklemden faydalanılarak eşdeğer ileri yol transfer fonksiyonu

$$G_{eş}(z) = \frac{11.52K_D(z - 1)(z + 0.9217)}{z(z^2 - 1.6636z + 0.8848)} \quad (6.15)$$

olarak bulunur. Şekil-6.1'de $K_D > 0$ için sistemin kök çevreleri verilmiştir. Bu kök çevrelerinde görüldüğü gibi PD kontrolörünün sisteme etkisi eğri gerçek eksene fazla yaklaştığından çok sınırlıdır. Aşım yönünden en uygun K_D değerinin %28 aşım ile 0.022 olduğu gösterilebilir.

Şekil-6.1 Dijital PD kontrolörüne ilişkin kök eğrisi

Dijital PI Kontrolör Tasarımı

Buradaki tasarımda PID kontrolörünün, geri dikköretgen entegrasyon yöntemi ile gerçekleştirileceği. Buna göre $K_D=0$ için dijital PI kontrolörünün transfer fonksiyonu

$$G_c(z) = \frac{K_p z - (K_p - K_I T)}{z - 1} \quad (6.16)$$

olarak elde edilir. PI kontrolörü daha önceden de ifade edildiği gibi kararlı-hal hatasını düzeltmek için kullanılır.

Örnek

Kontrol edilecek sistemin transfer fonksiyonu

$$G_p(s) = \frac{10}{(s + 1)(s + 2)} \quad (6.17)$$

olarak verilmiş ve örnekleme periyodu $T=0.1s$ olarak verilmiştir. Kompanze edilmemiş sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G_{ho} G_p(z) = \frac{0.0453(z + 0.905)}{(z - 0.905)(z - 0.819)} \quad (6.18)$$

olarak elde edilir. Verilen performans kriterleri:

- Rampa-hata sabiti $K_v \geq 5$,
- Maksimum aşım $\leq 5\%$,
- Maksimum aşım zamanı $t_{max} \leq 1s$.

PI kontrolörlü açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G(z) = \frac{0.0453[(K_p z - (K_p - K_I T))(z + 0.905)]}{(z - 1)(z - 0.905)(z - 0.819)} \quad (6.19)$$

olarak yazılır ve rampa-hata sabiti

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z) = 5.0187 K_I \geq 5 \quad (6.20)$$

olarak yazılarak $K_I=1$ seçilebilir. K_I bulunduktan sonra K_p nin etkisi kök yer eğrisi ile incelenebilir. $K_I=1$ iken kompanze edilmiş sistemin karakteristik denklemini

$$(z - 1)(z - 0.905)(z - 0.819) + 0.00453(z + 0.905) + 0.00453 K_p (z - 1)(z + 0.905) = 0$$

son denklemini K_p içermeyen terime bölersek

$$1 + G_{eş} = 1 + \frac{0.0453 K_p (z - 1)(z + 0.905)}{z^3 - 2.7236z^2 + 2.469z - 0.7367} = 0 \quad (6.21)$$

$G_{eş}(z)$ denkleminde çarpıcı faktör sadece K_P olduğuna göre kök eğrisi gerçekleştirilebilir ve şekil-6.2’de verilmiştir.

Şekil-6.2. Dijital PI kontrolörüne ilişkin kök eğrisi

Aşağıdaki tabloda $K_I=1$ için K_P , Aşım ve t_{max} değerleri verilmiştir. Bu sonuçlara göre PI kontrolörü kararlı hal hatasını elimine ederken aşım ve t_{max} kriterleri üzerine fazla etkili değildir.

Tablo-6.1. Dijital PI kontrolöre ilişkin bazı parametreleri

K_P	Aşım	$T_{max}(s)$
1.5	1.476	9
1.4	1.473	10
1.0	1.464	12
0.9	1.476	12
0.5	1.617	16

Dijital PID Kontrolör Tasarımı

Örnek

Bu örneğimizde kontrol edilecek sistemin transfer fonksiyonu

$$G_p(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)} \quad (6.22)$$

olarak verilmiş ve örnekleme periyodu $T=0.1s$ olarak verilmiştir. Kompanze edilmemiş sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G_{ho}G_p(z) = \frac{0.0453(z + 0.905)}{(z - 0.905)(z - 0.819)} \quad (6.23)$$

olarak elde edilir. Verilen performans kriterleri:

- Rampa-hata sabiti $K_v \geq 5$,
- Maksimum aşım $\leq \%5$,
- Maksimum aşım zamanı $t_{max} \leq 1s$.

Dijital PID kontrolöründe bilinmeyen K_p , K_i , K_D parametrelerinin bulunması gerekmektedir. Rampa-hata sabitini bulmak için PI kontrolörü uygulanırsa

$$G(z) = \frac{0.0453[(K_p z - (K_p - K_i T)](z + 0.905)}{(z - 1)(z - 0.905)(z - 0.819)} \quad (6.24)$$

olarak yazılır ve rampa-hata sabiti

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z) = 5.0187K_i \geq 5$$

yazılarak $K_i=1$ seçilebilir. $G_{ho}G_p(z)$ 'in $z=0.905$ ve $z=0.819$ daki kutupları $G_c(z)$ 'e iki sıfır eklenerek yok edilebilir. Bu işlem

$$G_c(z) = \frac{(2K_p T + K_i T^2 + 2K_D)z^2 + (K_i T^2 - 2K_p T - 4K_D)z + 2K_D}{2Tz(z - 1)} \quad (6.25)$$

Bilinear transfer fonksiyonunu aşağıdaki gibi düzenleyerek kullanırsak

$$z^2 + \frac{K_i T^2 - 2K_p T - 4K_D}{2K_p T + K_i T^2 + 2K_D} z + \frac{2K_D}{2K_p T + K_i T^2 + 2K_D} = (z - 0.905)(z - 0.819) \quad (6.26)$$

yazılabilir. $T=0.1s$ ve $K_i=1$ ise K_p ve K_D değerleri son denklemden 1.454 ve 0.431 olarak bulunur. Bu değerler denklemler-6.25'de yazılırsa

$$G_c(z) = 5.811 \frac{(z - 0.905)(z - 0.819)}{z(z - 1)} \quad (6.27)$$

olarak yazılır ve PID kontrolörlü sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G(z) = G_c(z)G_{ho}G_p(z) = \frac{0.263(z + 0.905)}{z(z - 1)} \quad (6.28)$$

olarak yazılır. Şekil-6.3'de birim basamak cevabı verilmiş olup maksimum aşım=%3.8 ve $t_{\max}=0.6$ saniye olarak elde edilir.

Şekil-6.3. Dijital kontrolör sistem yanıtı.

7. PID Kontrolör Sistemlerinde Ziegler-Nichols Kuralları ile Ayarlama

Transfer fonksiyonu

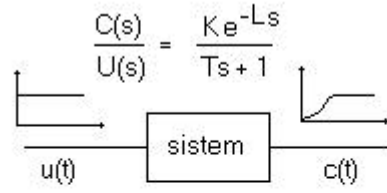
$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (7.1)$$

olan bir PID kontrolör sisteminde, Zeigler ve Nichols oransal kazanç K_p , integral zamanı T_i , ve diferansiyel zamanı T_d değerlerinin hesaplamasında basit kurallar sunmuşlardır. Bu kurallarda maksimum aşım %25 olarak hedeflenmektedir.

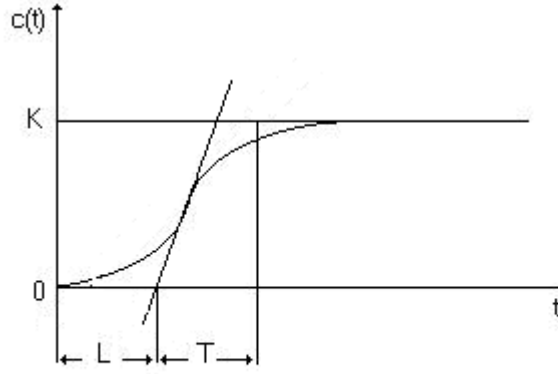
Birinci Metot

Birinci metotta deneysel olarak sisteme birim basamak uygulanır şekil-7.1'de gösterildiği gibi bir yanıt alınır. Şayet sistem integratör yada baskın kompleks eşlenik kutup içeriyorsa bu kural uygulanamaz.

Birim basamak yanıtı şekil-7.2'dekine benzeterek T ve L değerleri ölçülür ve K_p , T_i ve T_d parametreleri aşağıdaki tabloya göre hesaplanır.



Şekil-7.1 . Birim basamak yanıtı



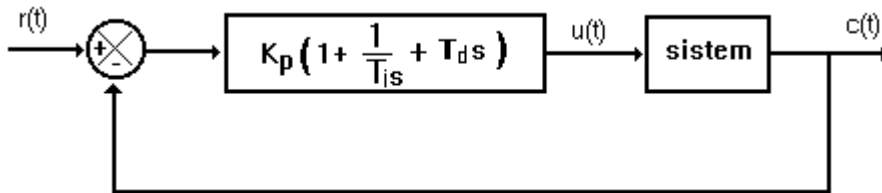
Şekil-7.2.Sistem yanıtı

Tablo-7.1.
Parametre seçim tablosu.

Kontrolör tipi	K_p	T_i	T_d
P	T/L	∞	0
PI	$0.9T/L$	$L/0.3$	0
PID	$1.2T/L$	$2L$	$0.5L$

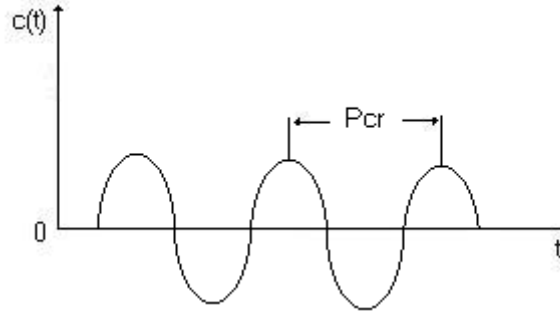
İkinci Metot

İkinci metotta ilk olarak $T_i = \infty$ ve $T_d = 0$ ' set edilerek sadece oransal kontrol yapılır. Şekil-7.3



Şekil-7.3. PID kontrolör blok diyagramı.

Bu kuralda K_p değeri 0 dan kritik değer olan K_{cr} değerine kadar artırılır ve bu değerde sistem çıkışı sürekli salınıma girer. Böylelikle K_{cr} ve buna karşı düşen P_{cr} periyodu not edilir şekil-7.4.



Şekil-7.4. Kritik salınımın bulunması.

Bu işlem gerçekleştirildikten sonra K_p , T_i ve T_d parametreleri aşağıdaki tabloya göre hesaplanır.

Tablo-7.2.
Parametre seçim tablosu.

Kontrolör tipi	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$0.83P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Örnek

Transfer fonksiyonu

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)} \quad (7.2)$$

olan bir sisteme PID kontrolörü uygulandığında K_p , T_i ve T_d parametrelerini bulunuz. Sistem integratör içerdiğine göre Zeigler ve Nichols'un ikinci metodu kullanılacaktır. $T_i = \infty$ ve $T_d = 0$ değerlerini ayarlayarak kapalı çevrim sisteminin transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5) + K_p} \quad (7.3)$$

olarak yazılır. Sistemin salınımı, Routh kararlılık kriteri kullanılarak bulunabilir. Kapalı çevrim sisteminin karakteristik denklemi

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0 \quad (7.4)$$

olarak yazılır. Buradan Routh dizisi

$$\begin{array}{l} s^3 \quad 1 \quad 5 \\ s^2 \quad 6 \quad K_p \\ s^1 \quad \frac{30-K_p}{6} \\ s^0 \quad K_p \end{array}$$

olarak elde edilir. Burada $K_p=30$ değerinde sistem salınma geçer kritik kazanç $K_{cr}=30$ olur. $K_p=30$ 'da karakteristik denklem

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0 \quad (7.5)$$

olarak yazılır. Salınım frekansını bulmak için $s=j\omega$ yazılırsa karakteristik denklem

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0 \quad (7.6)$$

veya

$$6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0 \quad (7.7)$$

yazılır ve salınım frekansı $\omega=\sqrt{5}$ olur ve salınım periyodu ise

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.81 \quad (7.8)$$

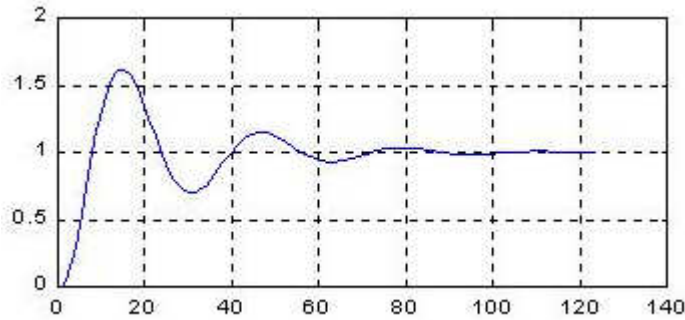
olarak bulunur ve tablo-7.2' ye göre diğer parametreler

$$K_p = 0.6K_{cr} = 18$$

$$T_i = 0.5P_{cr} = 1.405$$

$$T_d = 0.125P_{cr} = 0.35124$$

Olarak bulunur. Sistemin birim basamak yanıtı şekil-7.5'te verilmiş olup sistemin aşımı %62 olup bu parametrelerin tekrardan bilgisayarda veya kök eğri yöntemi kullanılarak hassas olarak düzeltilmesi gerekmektedir.



Şekil-7.5. PID kontrolöre ilişkin Sistem yanıtı.

PID kontrolörün transfer fonksiyonunu aşağıdaki formda tekrar yazarsak

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_D s \quad (7.9)$$

- K_p = oransal kazanç
- K_I = Integral kazanç
- K_d = diferansiyel kazanç

Olarak yazılır ve özetlersek, (K_p) yükselme zamanını ve kararlı hal hatasını azaltır fakat tamamen ortadan kaldırmaz. İntegral kontrol (K_i) kararlı hal hatasını yok eder fakat geçici durum yanıtını kötüleştirir. Diferansiyel kontrol (K_d) sistemin kararlılığını artırır aşımı azaltır. Kapalı çevrimli bir sistemin K_p , K_d , ve K_i katsayılarının etkileri aşağıdaki tabloya göre özetlenebilir.

Tablo-7.3. PID kontrolörde parametrelerin etkileri

CL RESPONSE	RISE TIME	OVERSHOOT	SETTLING TIME	S-S ERROR
K_p	Decrease	Increase	Small Change	Decrease
K_i	Decrease	Increase	Increase	Eliminate
K_d	Small Change	Decrease	Decrease	Small Change

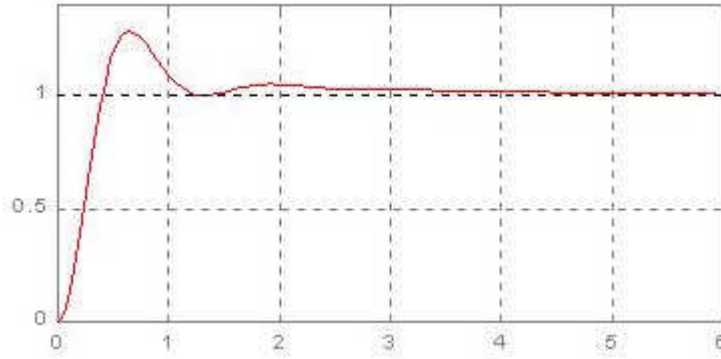
K_p , K_i ve K_d kazanç sabitleri K_p , T_i ve T_d sabitleri cinsinden ifade edilebilir

$$K_p = K_p$$

$$K_i = 1/T_i$$

$$K_d = T_d$$

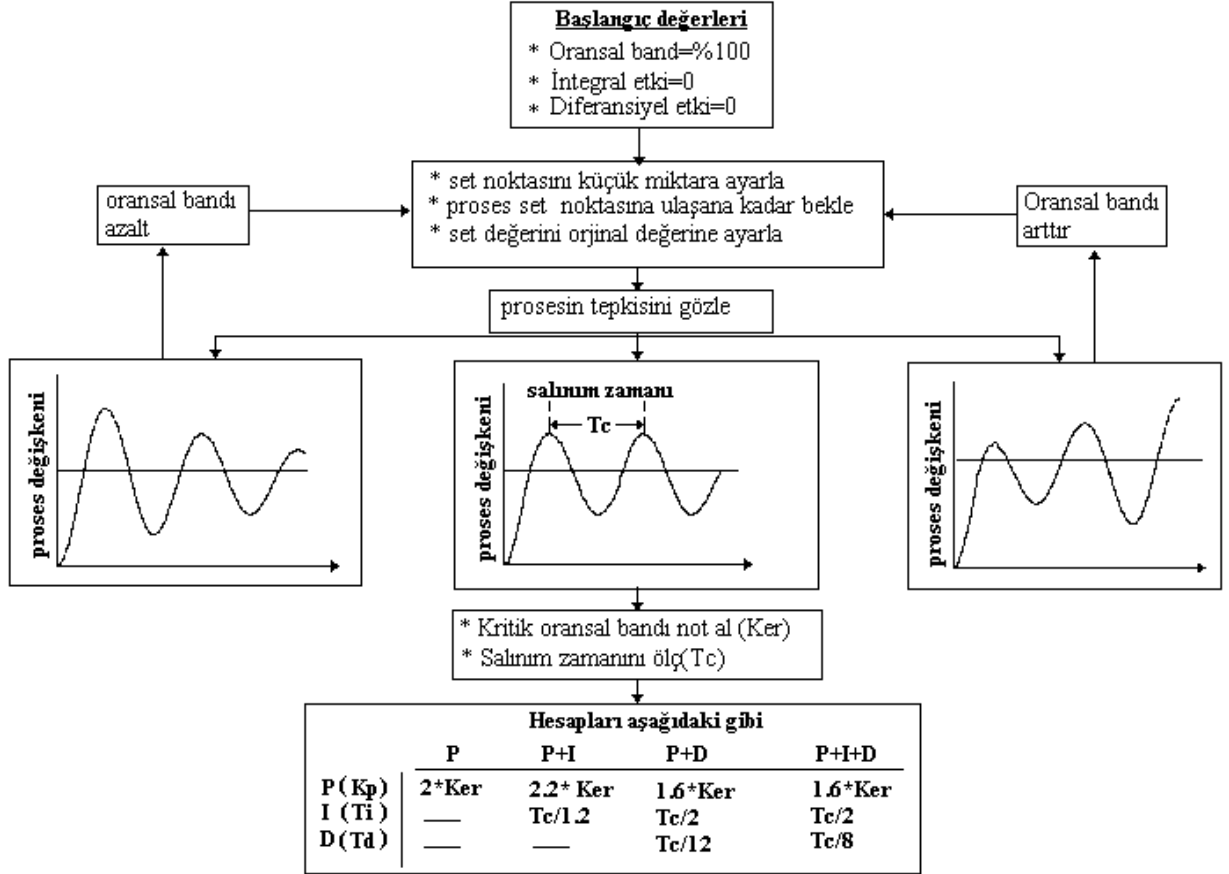
Bağıntıları yazılarak $K_p=39.42$, $T_i=3.077$, $T_d=0.7692$ değerlerinde sistemin aşımı ve yerleşme zamanı düzeltilmiş olur.



Şekil-7.6. PID kontrolöre ilişkin düzeltilmiş sistem yanıtı

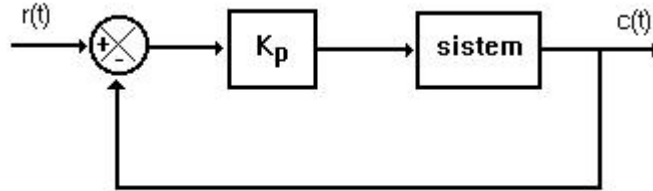
8. Matematik Modeli Bilinmeyen Sistemlerde PID Kontrolör Tasarımı

Ziegler-Nichols, PID kontrolünde K_p , T_i , ve T_d parametrelerinin belirlenmesi için iki metoddan oluşan ve deneysel basamaklarla gerçekleştirilen yöntemler sunmaktadır. Bu yöntemler sistemin matematik modeli bilinmiyorsa PID parametrelerinin belirlenmesinde iyi bir yöntem olmaktadır. İşletme mühendisi sistem üzerinde deneyler yaparak en uygun PID parametrelerinin belirlenmesinden sonra bir daha gerekmedikçe bu değerler değiştirilmez. Şekil-7'de özetlenen algoritma Ziegler-Nichols yönteminin ikinci basamağından yola çıkarak geliştirilmiş olup en pratik ve en çok kullanılanıdır.



Şekil-7 PID parametrelerinin ayarlanması algoritması

Bu yöntemde ilk olarak şekil-8 de gösterildiği gibi T_i 'yi sonsuza T_d 'yi sıfıra getirerek sadece oransal kontrol gerçekleştirilir.



Şekil-8. PID kontrol blok diyagramı

Daha sonra set değerini küçük bir değere ayarlayıp sistemin salınımı işletmeye zarar vermeyecek şekilde getirilir. Sistem bu değere geldiğinde set değeri tekrar orjinal değerine getirilir ve sistemin salınımı gözlenir. Şayet sistem salınımı daralarak set değerine yaklaşıyorsa K_p azaltılır, tam tersi durumda ise K_p 'yi çoğaltarak sabit salınımı elde edene kadar K_p ile oynanır. Sabit salınım elde edildiği anda bu K_p kritik değeri K_{er} olarak not edilir, aynı anda salınımın iki tepe arasındaki kritik zamanı T_c olarak not edilir. Bu değerler alındıktan sonra kullanılacak kontrol sistemine göre K_p , T_i ve T_d tabloya göre hesaplanır. Bu hesaplamalar sisteminizi optimum performansla çalışmasını sağlayacaktır. Bu şekilde ayarlanan sistemlerin kararlı duruma oturması şekil-9'da gösterildiği gibi gerçekleşir ve oturma zamanı (T_s) değişik şartlara göre 1-5 saat arasında değişmektedir[2].